

Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine
Esame di ammissione per l'a.a. 2010-11
Prova di Matematica n.1 del 6/9/2010

1. Un veicolo che percorre una strada asfaltata e rettilinea s viaggia a velocità costante $2v$ ($v > 0$), ma sul terreno piano, un po' più accidentato, della campagna circostante, che è priva di strade, viaggia a velocità v . Si consideri una retta r , giacente sul terreno, ortogonale ad s . Se il veicolo parte da una posizione $O \in s$ all'istante $t = 0$, quali sono i punti di r più lontani da s che può raggiungere all'istante $T > 0$? Discutere, rispetto alla distanza $c > 0$ di r dal punto O , il percorso che il veicolo deve effettuare.
2. Costruire una corrispondenza biunivoca tra i numeri reali dell'intervallo $]0, 1[$, espressi in forma decimale, e le coppie di numeri reali, quindi i punti del piano, che appartengono al quadrato $]0, 1[\times]0, 1[$.
3. Nello spazio tridimensionale, riferito ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\{O; x, y, z\}$, si consideri il cubo unitario $Q = [0, 1]^3$. Il piano π passante per l'origine O e contenente la retta r lungo cui si incontrano la faccia superiore del cubo, $z = 1$, e il piano verticale $2x + 2y = 3$ divide Q in due parti. Calcolare il volume della parte inferiore.
4. Da una scatola contenente n palline bianche e k palline nere ($n > k$) si estrae casualmente una pallina dopo l'altra. Calcolare la probabilità che dopo $2k$ estrazioni siano state estratte k palline bianche e k palline nere.
5. Un asse di simmetria di un solido nello spazio tridimensionale è una retta per cui esiste una rotazione attorno ad essa di un angolo α , $0 < \alpha < 2\pi$, che lascia inalterata la configurazione del solido.
 - a) Determinare il numero di assi di simmetria di un tetraedro regolare.
 - b) Determinare il numero di rotazioni distinte, compreso l'identità, che non alterano la configurazione del tetraedro.
 - c) Determinare il numero di assi di simmetria di un cubo.
 - d) Determinare il numero di rotazioni distinte, compreso l'identità, che non alterano la configurazione del cubo.

Spiegare la relazione tra i numeri trovati nei punti b) e d) tenendo conto che il cubo è l'unione di due tetraedri (non disgiunti).

6. La cifra meno significativa della rappresentazione di un numero naturale in una data base b è la cifra che sta più a destra.
 - a) Dire se esiste un numero naturale n le cui cifre meno significative nelle sue rappresentazioni in base 10 e 8 siano rispettivamente 9 e 4.
 - b) Determinare, se esiste, un numero naturale m le cui cifre meno significative nelle sue rappresentazioni in base 10 e 8 siano rispettivamente 7 e 3 e tale che, in base 10, $500 \leq m < 540$.
 - c) Determinare la cifra meno significativa in base 10 di m^{1000} , essendo m uno dei numeri determinati al punto b).

Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine
Esame di ammissione per l'a.a. 2010-11
Prova di Matematica n.2 del 6/9/2010

1. Preso un punto in un quadrato di lato unitario (interno al quadrato o appartenente ad uno dei lati) si consideri la somma delle distanze di tale punto dai 4 vertici del quadrato. Stabilire per quale punto (o punti) tale somma risulta massima motivando in modo esauriente la risposta.
2. Si considerino i due intervalli di numeri reali: $A =]0, 1[$ e $B =]-\infty, 5[$. Determinare una corrispondenza biunivoca $f : A \rightarrow B$.
3. Nello spazio tridimensionale, riferito ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\{O; x, y, z\}$, si consideri il cubo unitario $Q = [0, 1]^3$. Il piano π passante per l'origine O e contenente la retta r lungo cui si incontrano la faccia superiore del cubo, $z = 1$, e il piano verticale $x + y = 1$ divide Q in due parti. Calcolare il volume della parte inferiore.
4. Un trattato di 5 volumi, numerati da 1 a 5, è posto su uno scaffale in ordine casuale.
 - a) Con che probabilità i volumi sono ordinati in ordine crescente dall'1 al 5 oppure in ordine decrescente dal 5 all'1?
 - b) Con che probabilità i volumi 1 e 5 non vengono a trovarsi l'uno accanto all'altro?
5. Un asse di simmetria di un solido nello spazio tridimensionale è una retta per cui esiste una rotazione attorno ad essa di un angolo α , $0 < \alpha < 2\pi$, che lascia inalterata la configurazione del solido.
 - a) Determinare il numero di assi di simmetria di un tetraedro regolare.
 - b) Determinare il numero di rotazioni distinte, compreso l'identità, che non alterano la configurazione del tetraedro.
 - c) Determinare il numero di assi di simmetria di un cubo.
 - d) Determinare il numero di rotazioni distinte, compreso l'identità, che non alterano la configurazione del cubo.

Spiegare la relazione tra i numeri trovati nei punti b) e d) tenendo conto che il cubo è l'unione di due tetraedri (non disgiunti).
6. La cifra meno significativa della rappresentazione di un numero naturale in una data base b è la cifra che sta più a destra.
 - a) Dire se esiste un numero naturale n le cui cifre meno significative nelle sue rappresentazioni in base 10 e 8 siano rispettivamente 9 e 4.
 - b) Determinare, se esiste, un numero naturale m le cui cifre meno significative nelle sue rappresentazioni in base 10 e 8 siano rispettivamente 7 e 3 e tale che, in base 10, $500 \leq m < 540$.
 - c) Determinare la cifra meno significativa in base 10 di m^{1000} , essendo m uno dei numeri determinati al punto b).